

Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos em Espaços de Hilbert

Enrico Campos Rossini

IME-USP

Dezembro de 2021

- 1 4 enunciados preliminares
- 2 Espectro e operadores compactos autoadjuntos
- 3 O Teorema Espectral
- 4 Referências e agradecimento

Função holomorfa a valores em espaços de Banach

Definição 1.1: Função holomorfa

Sejam X um espaço de Banach e $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto conexo! Dizemos que uma função $f : \Omega \rightarrow X$ é **holomorfa em** $z \in \Omega$ quando existe o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Tal limite, quando existe, é denotado por $f'(z)$. Além disso, dizemos que f é **holomorfa em** Ω quando, $\forall z \in \Omega$, f é holomorfa em z .

Conjunto ortonormal completo/Soma direta

Definição 1.2: Conjunto ortonormal completo

Sejam H um espaço de Hilbert e $S \subseteq H$ um conjunto ortonormal! Se $S^\perp = \{0\}$, dizemos que S é um conjunto ortonormal completo.

Teorema 1.3: Equivalência conjunto ortonormal completo

Sejam H um espaço de Hilbert, I um conjunto de índices e $S = \{e_i : i \in I\} \subseteq H$ um conjunto ortonormal em H ! Temos que S é completo se, e somente se, $\overline{\text{span}(S)} = H$.

Teorema 1.4: Soma direta de espaço completo com seu ortogonal

Sejam H um espaço de Hilbert e $M \subseteq H$ um espaço vetorial completo! Temos que:

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Resolvente e Espectro

Definição 2.1: O resolvente de T

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$! Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ **está no conjunto resolvente de T** , que é denotado por $\rho(T)$, quando a função $(\lambda Id - T)$ é uma bijeção com inversa contínua.

Definição 2.2: O espectro de T

Nas condições da Definição 2.1, o conjunto $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$ é chamado de **espectro de T** . Além disso, denotamos o espectro de T por $\sigma(T)$.

Observação 2.3: Definição equivalente para o resolvente de T

Devido a uma consequência imediata do Teorema da Aplicação Aberta (T.A.A), podemos exigir, na Definição 2.1, que $(\lambda Id - T)$ seja uma bijeção, pois a continuidade da inversa é garantida pelo T.A.A.

Resolvente e espectro

Teorema 2.4: $\rho(T)$ é um aberto de $\mathbb{C}$

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$! O conjunto $\rho(T)$ é um aberto de $\mathbb{C}$.

Teorema 2.5: $\sigma(T)$ é não vazio e está contido em uma bola

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$! O espectro de T é não vazio e está contido em $B_{\|T\|}[0] \subseteq \mathbb{C}$.

Definição 2.6: Raio espectral de T

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$! Chamamos de **raio espectral de T** , o valor:

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Resolvente e espectro/Operador autoadjunto

Proposição 2.7: Como calcular o raio espectral

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$! Temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r(T).$$

Teorema 2.8: Existe operador adjunto

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$! Existe um único $T'_H \in \mathcal{L}(H)$, que é chamado de adjunto de T , tal que:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T'_H(y) \rangle \quad \forall x \in H \text{ e } \forall y \in H.$$

Definição 2.9: Operador autoadjunto

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$! Se $T = T'_H$, dizemos que T é um **operador autoadjunto**.

Função compacta/Espectro de operador autoadjunto

Definição 2.10: Função compacta

Sejam X e Y espaços de Banach! Uma função $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é dita **compacta** quando, $\forall S \subseteq X$ limitado, $\overline{T(S)}$ é compacto em Y .

Proposição 2.11: Equivalência de função compacta

Sejam X e Y espaços de Banach! Uma função $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é compacta se, e somente se, para toda $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em X , $(T(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possui subsequência convergente.

Teorema 2.12: Propriedades de $\sigma(T)$ quando T é autoadjunto

Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto! Temos que:

- 1 $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.
- 2 Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de $v \in H$ e $\mu \in (\mathbb{C} \setminus \{\lambda\})$ é autovalor de $u \in H$, então $\langle v, u \rangle = 0$. Em outras palavras, autovetores de autovalores distintos são ortogonais.

Teoremas de Fredholm

Teorema 3.1: Teorema Analítico de Fredholm (T.A.F)

Sejam H um espaço de Hilbert, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H)$ uma função holomorfa! Se $f(z) \in \text{Com}(H) \forall z \in \Omega$, então uma, e apenas uma, das seguintes afirmações é válida:

- 1 $\forall z \in \Omega$, $(Id - f(z))$ não é invertível.
- 2 Existe $S \subseteq \Omega$ um conjunto discreto em Ω - isto é, um conjunto que não possui ponto de acumulação em Ω - tal que, $\forall z \in (\Omega \setminus S)$, $(Id - f(z))$ é invertível. Além disso, $\forall z \in S$, existe $x \in (H \setminus \{0\})$ tal que $(f(z))(x) = x$, ou seja, $(Id - f(z))(x) = 0$.

Corolário 3.2: Alternativa de Fredholm

Sejam H um espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(H)$! Se A é compacto, então deve valer uma, e apenas uma, das seguintes afirmações:

- 1 $(Id - A)$ é invertível.
- 2 Existe $x \in (H \setminus \{0\})$ tal que $A(x) = x$.

Teoremas de Fredholm

Demonstração:

- Defina $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tal que $f(z) = zA$! É claro que f se encontra nas condições do T.A.F.
- Agora, perceba que $(Id - f(0)) = Id$ é invertível! Logo, não pode valer a afirmação 1) do T.A.F e, portanto, vale 2).
- Se $1 \in (\mathbb{C} \setminus S)$, então $(Id - f(1)) = (Id - A)$ é invertível. Agora, se $1 \in S$, então $\exists x \in (H \setminus \{0\})$ tal que $A(x) = (f(1))(x) = x$.

Riesz-Schauder

Teorema 3.3: Teorema de Riesz-Schauder

Sejam H um espaço de Hilbert e $A \in \text{Com}(H)$! Temos que $\sigma(A)$ é um conjunto discreto em $(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ e, além disso, se $\lambda \in (\sigma(A) \setminus \{0\})$, então λ é um autovalor de A de multiplicidade finita, isto é, o espaço vetorial gerado pelos autovetores de λ possui dimensão finita.

Demonstração:

- Defina $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tal que $f(z) = zA$! É evidente que f está nas condições do T.A.F.
- Agora, perceba que $(Id - f(0)) = Id$ é invertível! Logo, não pode valer a afirmação 1) do T.A.F e, portanto, vale 2).
- Assim, existe $S \subseteq \mathbb{C}$ um conjunto discreto em $\mathbb{C}$ tal que, $\forall z \in (\mathbb{C} \setminus S)$, $(Id - f(z)) = (Id - zA)$ é invertível. Além disso, $\forall z \in S$, $\exists x \in (H \setminus \{0\})$ tal que $zA(x) = (f(z))(x) = x$.

Riesz-Schauder

- Agora, dado $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, podemos utilizar a afirmação 2) para concluirmos que se $\lambda \in \sigma(A)$, então:

$(\lambda Id - A)$ não é invertível. $\Rightarrow [\lambda(Id - \lambda^{-1}A)]$ não é invertível. $\Rightarrow$

$(Id - \lambda^{-1}A)$ não é invertível. $\Rightarrow \lambda^{-1} \in S$.

- Além disso, note que:

λ é autovalor de A . $\Leftrightarrow \exists x \in (H \setminus \{0\})$ tal que $A(x) = \lambda x \Leftrightarrow$

$\exists x \in (H \setminus \{0\})$ tal que $\lambda^{-1}A(x) = x \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in S$.

Riesz-Schauder

- As últimas duas seqüências de implicações lógicas nos permitem concluir que, $\forall \lambda \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, vale:

$$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^{-1} \in S \Rightarrow \lambda \text{ é autovalor de } A.$$

- Agora, desejamos provar que se $\lambda \in (\sigma(A) \setminus \{0\})$, então λ tem multiplicidade finita.
- Suponha, por absurdo, que λ tenha multiplicidade infinita! De tal forma, podemos obter $\{e_n: n \in \mathbb{N}\}$ um conjunto ortonormal enumerável tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A(e_n) = \lambda e_n$.
- Como A é compacto e $\{e_n: n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado, podemos utilizar a Proposição 2.11 para concluirmos que $(A(e_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possui subsequência convergente.
- No entanto, isso é um absurdo, uma vez que, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, obtemos:

Riesz-Schauder

$$\|A(e_n) - A(e_m)\| = \|\lambda e_n - \lambda e_m\| = |\lambda| \|e_n - e_m\| = |\lambda| [(\langle e_n - e_m, e_n - e_m \rangle)]^{\frac{1}{2}} =$$

$$|\lambda| [\langle e_n, e_n \rangle + \langle e_m, e_m \rangle]^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}} |\lambda|.$$

- Logo, λ deve ter multiplicidade finita. Por fim, desejamos mostrar que $\sigma(A)$ é um conjunto discreto em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Tome $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})$! Uma vez que S é um conjunto discreto em $\mathbb{C}$, $\exists r > 0$ tal que $(B_r(\lambda^{-1}) \setminus \{\lambda^{-1}\}) \cap S = \emptyset$.
- Como a função $g : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = z^{-1}$ é contínua e injetora, podemos achar $s > 0$ tal que $0 \notin B_s(\lambda)$ e $g(B_s(\lambda) \setminus \{\lambda\}) \subseteq (B_r(\lambda^{-1}) \setminus \{\lambda^{-1}\})$.

Riesz-Schauder

- Logo, $\forall z \in (B_s(\lambda) \setminus \{\lambda\})$, $z^{-1} \notin S$ e, portanto, devido a primeira sequência de implicações lógicas desta demonstração, $z \notin \sigma(A)$.
- Concluimos, portanto, que $(B_s(\lambda) \setminus \{\lambda\}) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \sigma(A)) \forall \lambda \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})$.
De tal forma, $\sigma(A)$ é um conjunto discreto em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Corolário 3.4

Sejam H um espaço de Hilbert e $A \in Com(H)$! Temos que $\sigma(A)$ é, no máximo, enumerável.

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

Teorema 3.5: Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

Sejam H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita. Se $A \in \text{Com}(H)$ é um operador autoadjunto, então existem $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ e $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ uma base ortonormal completa enumerável tais que:

1 $A(e_n) = \lambda_n e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2 $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Demonstração:

- Defina $B = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \lambda \text{ é autovalor de } A\}$. Como $B \subseteq \sigma(A)$, o Corolário 3.4 nos permite concluir que B é, no máximo, enumerável.
- Agora, $\forall \lambda \in B$, denote por V_λ o espaço vetorial gerado pelos autovetores de λ . Devido ao Teorema de Riesz-Schauder, sabemos que V_λ tem dimensão finita $\forall \lambda \in B$.

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

- Seja, pois, $\forall \lambda \in B$, $\{v_1^\lambda, \dots, v_{n_\lambda}^\lambda\}$ uma base ortonormal de V_λ . Com isso em mente, precisamos analisar dois casos distintos.
- Suponha que $\text{Ker}(A) \neq \{0\}$. Como H é um espaço métrico separável e $\text{Ker}(A) \subseteq H$, podemos concluir que $\text{Ker}(A)$ também é separável. Além disso, sabemos que $\text{Ker}(A)$ é completo, pois H é completo e $\text{Ker}(A)$ é fechado. De tal forma, se $\text{Ker}(A)$ tem dimensão infinita, podemos obter $\{v_j^0 : j \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal completa enumerável de $\text{Ker}(A)$.
- Agora, se $\text{Ker}(A)$ tem dimensão finita, então obtemos $\{v_1^0, \dots, v_{n_0}^0\}$ uma base ortonormal finita de $\text{Ker}(A)$. Logo, podemos concluir que existe um conjunto de índices I que é, no máximo, enumerável e, além disso, $\{v_i^0 : i \in I\}$ é uma base ortonormal de $\text{Ker}(A)$.

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

- Desse modo, pelo Teorema 2.12, podemos concluir que o conjunto..

$$C = \left[\bigcup_{\lambda \in B} \{v_1^\lambda, \dots, v_{n_\lambda}^\lambda\} \right] \cup \{v_i^0 : i \in I\}$$

..é ortonormal.

Defina $M = \overline{\text{span}\{C\}}$. De tal forma, se $x \in M$, então existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\text{span}\{C\}$ tal que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Além disso, $\forall n \in \mathbb{N}$, existem $\alpha_1^n, \dots, \alpha_{m_n}^n \in \mathbb{C}$ e $\{w_1^n, \dots, w_{m_n}^n\} \subseteq C$ tais que:

$$x_n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^n w_i^n.$$

Assim, uma vez que A é linear e contínuo, obtemos:

$$A(x) = A\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A\left(\sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^n w_i^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^n A(w_i^n).$$

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

- Como $w_i^n \in C \forall i \in \{1, \dots, m_n\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \beta_1^n, \dots, \beta_{m_n}^n \in \mathbb{C}$ tais que, $\forall i \in \{1, \dots, m_n\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}, A(w_i^n) = \beta_i w_i^n$. Desse modo, a sequência de igualdades anterior pode continuar da seguinte maneira:

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^n A(w_i^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i^n \beta_i^n w_i^n.$$

- Logo, podemos concluir que $A(x) \in \overline{\text{span}\{C\}} = M$. Como $x \in M$ era arbitrário, temos que M é um subespaço invariante de A , ou seja, se definirmos $A|_M : M \rightarrow H$, então $\text{Im}(A|_M) \subseteq M$. Com isso em mente e utilizando o fato de que A é autoadjunto, perceba que se $y \in M$ e $z \in M^\perp$, então:

$$\langle A(z), y \rangle = \langle z, A(y) \rangle = 0.$$

- Logo, temos que $\text{Im}(A|_{M^\perp}) \subseteq M^\perp$. Note que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de $A|_{M^\perp}$, então λ é autovalor de A . No entanto, por construção, os autovetores de A estão em M , sendo que $M \cap M^\perp = \{0\}$. De tal forma, podemos concluir que $A|_{M^\perp}$ não possui autovalores.

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

- Agora, uma vez que $A|_{M^\perp}$ é compacta e autoadjunta, podemos aplicar o Teorema de Riesz-Schauder para concluirmos que se $\lambda \in (\sigma(A|_{M^\perp}) \setminus \{0\})$, então λ é autovalor de $A|_{M^\perp}$.
- Assim, podemos concluir que $\sigma(A|_{M^\perp}) \subseteq \{0\}$. Logo, $r(A|_{M^\perp}) = 0$ e, portanto, $A|_{M^\perp} = 0$, pois, aplicando a Proposição 2.7, obtemos:

$$0 = r(A|_{M^\perp}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|A|_{M^\perp}^n\|)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|A|_{M^\perp}\|^n)^{\frac{1}{n}} = \|A|_{M^\perp}\|.$$

- Com isso em mente, suponha, por absurdo, que $\exists v \in (M^\perp \setminus \{0\})$. De tal forma, temos que:

$$0 = A|_{M^\perp}(v) = A(v).$$

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

- Logo, v é um autovetor associado ao autovalor 0, mas isso é um absurdo, pois os autovetores de A estão em M . Assim, podemos concluir que $M^\perp = \{0\}$. Desse modo, obtemos:

$$H = M = \overline{\text{span} \left(\bigcup_{\lambda \in B} \{v_1^\lambda, \dots, v_{n_\lambda}^\lambda\} \cup \{v_i^0 : i \in I\} \right)}.$$

- Agora, suponha, por absurdo, que C seja finito. Logo, podemos concluir que $\text{span}(C)$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Uma vez que todo espaço vetorial de dimensão finita é fechado, obtemos:

$$H = M = \overline{\text{span}(C)} = \text{span}(C).$$

- A igualdade anterior é um absurdo, pois, por hipótese, H tem dimensão infinita. Logo, podemos concluir que C é infinito. Além disso, devido às observações feitas no início desta demonstração, sabemos que C é enumerável. Com essa análise, podemos concluir que $\text{Ker}(A)$ é enumerável ou $\bigcup_{\lambda \in B} \{v_1^\lambda, \dots, v_{n_\lambda}^\lambda\}$ é enumerável.

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

- Se $\text{Ker}(A)$ é enumerável, então é evidente que conseguimos obter uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como no enunciado. Agora, se $\bigcup_{\lambda \in B} \{v_1^\lambda, \dots, v_{n_\lambda}^\lambda\}$ é enumerável, então é evidente que B deve ser enumerável. Seja, pois, $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração de B .
- Como $\sigma(A)$ é um compacto - isso é uma consequência dos Teoremas 2.4 e 2.5 - e $\lambda_n \in \sigma(A) \forall n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $\exists \lambda \in \sigma(A)$ tal que $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$. Pelo Teorema de Riesz-Schauder, devemos ter $\lambda = 0$.
- Deixamos o caso $\text{Ker}(A) = \{0\}$ como "exercício", pois é apenas uma simplificação da demonstração já feita.

Referências

- Pellegrino, Daniel. *Introdução à Análise Funcional*, SBM, 1, 2008.
- Reed, Michael; Simon, Barry. *Methods of Modern Mathematical Physics I*, Academic Press, 1, 1980.

Obrigado!